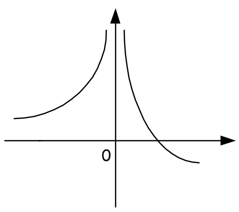
ASSIMPTOTAS VERTICAIS

Como calcular as assimptotas verticais?

1. Determinar o domínio da função
2. Determinar os pontos de descontinuidade (nas funções com módulos, quando se desdobram em ramos)
3. Calcular $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ (*a* são os pontos que não pertencem ao domínio ou os pontos de descontinuidade)
4. Se algum destes limites for $+\infty$ ou $-\infty$, a recta de equação $x = a$ é uma assimptota vertical.

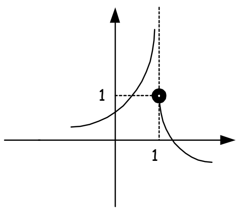
Exemplos:



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

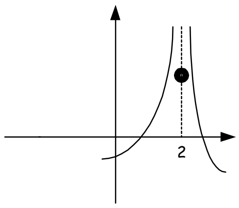
Logo, $x = 0$ é uma assimptota vertical bilateral



$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

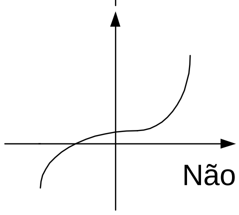
Logo, $x = 1$ é uma assimptota vertical unilateral



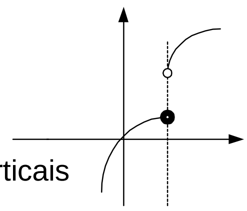
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

Logo, $x = 2$ é uma assimptota vertical bilateral



Não têm assimptotas verticais



Notas:

- As assimptotas verticais podem existir nos pontos de acumulação que não pertencem ao domínio. Explo n.º 1.
- Podem existir assimptotas nos pontos de descontinuidade. Explos. n.º 2 e 3
- Uma função de domínio $\mathbb{R}$ pode ter assimptotas desde que tenha pontos de descontinuidade. Explo n.º 3.
- Uma função de domínio $\mathbb{R}$ com pontos de descontinuidade pode não ter assimptotas verticais. Explo n.º 5, porque $\lim_{x \to 6} f(x) \neq \infty$
- Se uma função for contínua em $\mathbb{R}$ não tem assimptotas verticais.
- As funções polinomiais não têm assimptotas verticais porque são contínuas em $\mathbb{R}$.

ASSIMPTOTAS NÃO VERTICAIS (horizontais e oblíquas)

$\boxed{y = mx + b}$

m é o declive da recta
b é a ordenada na origem

Como calcular as assimptotas não verticais?

Determinar $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$.

Notas:

- Se $m = 0$, a assimptota, se existir, é horizontal, e é da forma $y = b$,com $b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.
- Se algum dos limites for infinito ou não existir, não há assimptotas não verticais.
- As assimptotas podem ser diferentes quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Isto acontece, principalmente, quando há funções com e^x, uma vez que $e^{+\infty} = +\infty$ e $e^{-\infty} = 0$.
- Se o domínio for, por exemplo, $\mathbb{R}^+$, não faz sentido calcular a assimptota para $-\infty$ e vice-versa.
- Uma função pode ter infinitas assimptotas verticais, mas nunca tem mais do que duas assimptotas não verticais (horizontais ou oblíquas).

Exemplo: Calcular assimptotas não verticais de $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Não tem assimptotas não verticais para $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = 0$$

Como $m = 0$, podemos concluir que se existir assimptota, esta será horizontal.

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{e^x}{x} - 0x\right] = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = 0 .$$

Logo $b = 0$.

Então, $y = 0$ é a equação da assimptota horizontal.

Assimptotas de funções racionais:

Funções racionais: $\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$

- Assimptotas verticais: Poderá ter tantos quantos os zeros do denominador.
- Assimptotas horizontais: Se as funções racionais tiverem, têm apenas uma.
  - ✓ Se $m > n$, $y = 0$.
  - ✓ Se $m = n$, $y = \frac{a_0}{b_0}$.
  - ✓ Se $m < n$, não tem.
- Assimptotas oblíquas: $y = mx + b$

  Se o grau do numerador é maior uma unidade que o grau do denominador, e se estes não têm factores em comum, então há uma assimptota oblíqua.