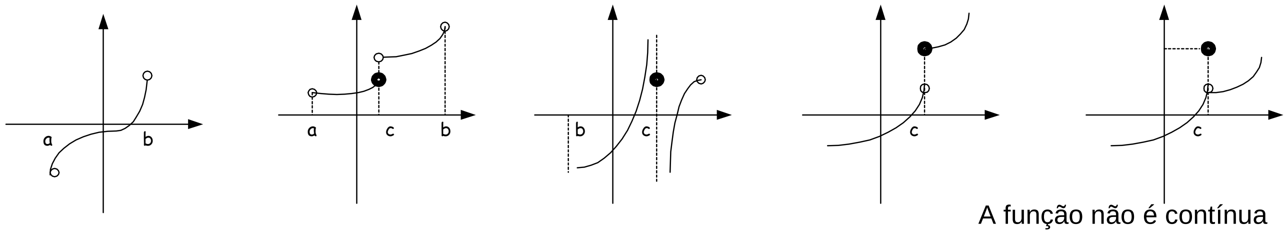
Continuidade de uma função num ponto

Para que uma função seja contínua num ponto é necessário que:

- O ponto pertença ao domínio;
- Exista limite no ponto (limites laterais iguais);
- O limite seja igual ao valor da função no ponto: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Exemplos:



É contínua pois não existe interrupção do gráfico

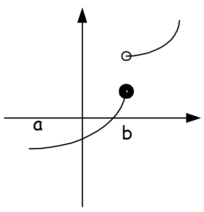
As funções não são contínuas em *c* porque não existe limite nesse ponto. São descontínuas em *c*

A função não é contínua em *c* porque o limite não é igual à sua imagem

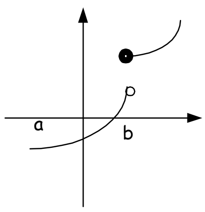
Continuidade lateral

Uma função pode ser descontínua num ponto c, mas pode ser contínua à esquerda ou à direita desse ponto.

Exemplos:



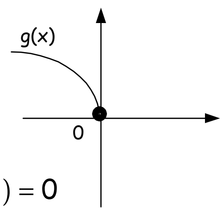
$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ logo *f* é contínua à esquerda de *b*



$\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$ logo *f* é contínua à direita de *b*

Atenção: Uma função pode ser contínua apenas à direita (ou à esquerda) de um ponto e ser contínua nesse ponto. Isto acontece se a função estiver definida apenas à direita (ou à esquerda) desse ponto.

Exemplos:



$g(0) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$

É contínua em $x = 0$. Não faz sentido calcular o limite à direita porque não pertence ao domínio da função

$f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0, +\infty[$

$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

É contínua em $x = 0$

Continuidade de uma função num intervalo

- Se uma função é contínua em todos os pontos de um intervalo aberto $]a, b[$, é contínua nesse intervalo.
- Uma função é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ se é contínua em $]a, b[$, à direita de a e à esquerda de b.
- Se uma função é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos, simplesmente, que a função é contínua.

Propriedades das funções contínuas:

- As funções polinomiais são contínuas em $\mathbb{R}$.
- Se duas funções f e g são contínuas num ponto de abcissa a, então as seguintes funções são também contínuas:

  $f+g$; $f-g$; $f\times g$; kf $(com\ k\in\mathbb{R})$; $\frac{f}{g}$ (com $g\neq 0$)

  $\sqrt[n]{f}$ $(n\in\mathbb{N}$ e $f(x)>0$ se n é par) $f\circ g$ $(ou$ $g\circ f)$
- As funções racionais são contínuas em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo: $f(x)=\frac{x^3-1}{1-x}$. Como é o quociente entre duas funções polinomiais é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.