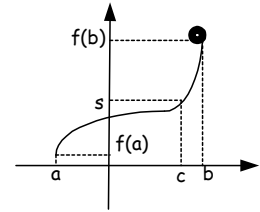


**Teorema de Bolzano-Cauchy** (ou Teorema do Valor Intermediário)

Seja  $f$  uma função real de variável real contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .

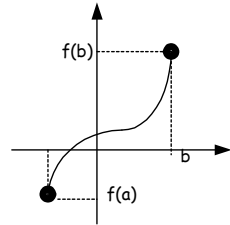
Se  $f(a) \leq s \leq f(b)$  então existe pelo menos um  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = s$ .



**Caso particular:** usa-se para provar que uma função tem zeros

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .

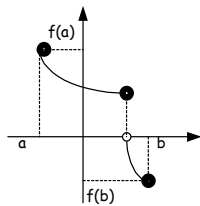
Se  $f(a) \times f(b) < 0$  então a função tem pelo menos um zero em  $]a, b[$ .



Notas:

- Sempre que se resolva um exercício e se utilize o Teorema é necessário mencionar a continuidade.
- O Teorema apenas confirma que uma função tem zeros. Não se pode usar para provar que a função não tem zeros, mesmo que  $f(a) \times f(b) > 0$ .

**Exemplo:**



$f(a) \times f(b) < 0$  e  $f(x)$  não tem zeros em  $]a, b[$ .

Este exemplo não contradiz o Teorema de Bolzano porque  $f$  não é contínua em  $[a, b]$ .

**Exercícios exemplificativos:**

<p style="text-align: center;"><math>f(x) = x^3 + 2x + 1</math></p> <p><b>a)</b> <math>f(x) = 0</math> será possível em <math>] -1, 4[</math> ?  <b>R:</b> <math>f(-1) = -2</math>; <math>f(4) = 73</math>. Como a função é contínua, pois trata-se de uma função polinomial, e como <math>f(-1) \times f(4) &lt; 0</math>, pelo Teorema de Bolzano podemos afirmar que existe pelo menos um zero em <math>] -1, 4[</math>. Assim <math>f(x) = 0</math> é possível nesse intervalo.</p> <p><b>b)</b> Terá <math>f(x)</math> zeros em <math>\mathbb{R}</math> ?  <b>R:</b> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty</math>, <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>.                  Como <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty (&lt; 0)</math> e como a função é contínua, pelo Teorema de Bolzano podemos afirmar que <math>f(x)</math> tem zeros em <math>\mathbb{R}</math>.</p>	<p><math>g(x)</math> é contínua em <math>\mathbb{R}</math>  <math>g(-3) = 5</math> e <math>g(3) = 1</math>                  no intervalo <math>[-3, 3]</math></p> <p>Podemos afirmar:  <b>(A)</b> <math>g</math> tem pelo menos um zero.  <b>R:</b> Falso. Nada podemos concluir porque <math>g(-3) \times g(3) &gt; 0</math></p> <p><b>(B)</b> <math>g</math> não tem zeros.  <b>R:</b> Falso. Nada podemos concluir porque <math>g(-3) \times g(3) &gt; 0</math>.</p> <p><b>(C)</b> <math>g(x) = -1</math> é impossível.  <b>R:</b> Falso. Nada podemos concluir porque só conhecemos o comportamento da função em <math>g(-3)</math> e <math>g(3)</math>.</p>
--	--