Exercícios

1. Considera as matrizes reais $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -a & 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   1.1. Determine *a* de modo que:

   a) as linhas de *A* sejam linearmente independentes;

   b) a matriz *B* seja a inversa de *A*.

   1.2. Fazendo $a=1$, determine *X* de modo que $\frac{1}{3}\left(A-I_3\right)^{-1} X^T = B^T$

   1.3. Fazendo $a=-4$, justifique que as linhas de *A*-*B* são linearmente dependentes e escreva uma como combinação linear das restantes.

2. Considera o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -\alpha x - 2y = 0 \\ x + z = 1 \\ -y + (\alpha+1)z = \beta - 1 \end{cases} ,com\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   2.1. Discuta o sistema em função dos parâmetros reais α e β.

   2.2. Considere $\alpha = \beta = 2$ e sejam *A, b* e *X* as matrizes dos coeficientes das incógnitas, dos termos independentes e das incógnitas, respectivamente.

   a) Calcule $adjA$.

   b) Calcule A^{-1} e utilize este resultado para obter a solução do sistema $AX = B$.

   c) Utilizando a regra de Cramer confirme o resultado obtido em b).

Resolução

1.1.

a) $$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & -1 & 0\\ -a & 0 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow[L'_3=L_2+\frac{1}{a}L_1,\,a\neq 0]{L'_2=L_2-L_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & a\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Para as linhas de A serem linearmente independentes $a \neq 0$.

b) Se *B* é a matriz inversa seja de *A*, então $AB=I_3 \Leftrightarrow A=B^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 0 & 0 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right]$$

Logo a matriz $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -3\end{bmatrix}$.

Assim, fazendo $a=2$, a matriz *B* é a inversa de *A*

1.2.

$$\frac{1}{3}(A-I_3)^{-1}X^T=B^T \Leftrightarrow$$

$$(A-I_3)(A-I_3)^{-1}X^T=3(A-I_3)B^T \Leftrightarrow$$

$$I_3X^T=3(A-I_3)B^T \Leftrightarrow$$

$$\left(X^T\right)^T=\left(3(A-I_3)B^T\right)^T \Leftrightarrow$$

$$X=3B(A-I_3)^T$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -3\end{bmatrix};\qquad A-I_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix};\qquad (A-I_3)^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$B\left(A-I_3\right)^T=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -2\\ -3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 11\\ -2 & -1 & 11\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}$$

Logo,

$$3B\left(A-I_3\right)^T=3\begin{bmatrix}-2 & -3 & 11\\ -2 & -1 & 11\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -9 & 33\\ -6 & -3 & 33\\ 3 & 6 & -18\end{bmatrix}$$

1.3.

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & 0 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 0 & -2\\ -3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 4 & 0 & -2\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

A segunda e terceira linhas são linearmente dependentes da primeira:

$L_1=L_2$ e $L_1=2L_3$

Um exemplo de combinação linear pode ser, $L_1=0L_1+2L_3$

2.1.

$$\begin{cases}-\alpha x-2y=0\\ x+z=1\\ -y+(\alpha+1)z=\beta-1\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}-\alpha & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ -\alpha & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{se } \alpha\neq 0}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & \alpha & \alpha\\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-1\end{bmatrix}$$

Se $\alpha\neq-1,\ \forall\beta\in\mathbb{R}$ então o sistema é possível e determinado

Se $\alpha=-1$ e $\beta=0$ então o sistema é possível indeterminado

Se $\alpha=-1$ e $\beta\neq 0$ então o sistema é impossível

2.2.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$; b=$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$; X=$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

Calculo dos co-factores:

$a_{11}=+\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-6$ $\quad a_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0$ $\quad a_{13}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$a_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0$ $\quad a_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$ $\quad a_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$a_{31}=+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2$ $\quad a_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$ $\quad a_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2$

Logo, a matriz $adjA=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$

b) $A^{-1}=\dfrac{(adjA)^T}{\det A}$

$\det A=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=-6$; $\quad adjA^T=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(adjA)^T}{\det A}=\frac{\begin{bmatrix}-6 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}}{-6}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$AX=B\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

Logo,

$$X=A^{-1}B\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

c)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}}{-6}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}}{-6}=-\frac{2}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{1}{3}$$